

谐波恢复的互高阶累计量Hankel矩阵法

康晓涛, 石要武, 张丽丽

(吉林大学通信工程学院, 吉林长春 130025)

摘要: 本文将状态空间模型与互高阶累计量结合在一起, 首次提出了基于状态空间模型谐波恢复的互高阶累计量的Hankel矩阵分解法. 该方法清晰地展现了谐波恢复问题的实质, 充分利用状态空间模型所具有的灵活性、方便性, 为解决谐波恢复问题提供了一条全新的思路, 是一种短数据条件下的高精度算法. 仿真结果表明, 该方法在混合色噪声和很低信噪比条件下谱估计的分辨率、稳定性及对混合色噪声的抑制等方面均明显优于自高阶谱估计方法.

关键词: 互高阶累计量; 谐波恢复; 状态空间模型

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2005)02-0062-03

The Hankel Matrix Decomposition Method of Cross2High2Order Cumulant Based on The Cross2High2Order Cumulant of State Space Model of Harmonic Retrieval

KANG Xiaotao, SHI Yaowu, ZHANG Lili

(College of Commun. Eng., Jilin University, Changchun, Jilin 130025, China)

Abstract: This paper proposes a totally new method to combine the state space model with cross2high2order cumulant. In another word, it is a hankel matrix decomposition method of cross2high2order cumulant based on the state space model of harmonic retrieval. The method shows clearly the substance of harmonic retrieval problem and takes fully advantage of flexibility and convenience of the state space model. It also proposes a new way to harmonic retrieval problem and deduces a high precision algorithm of short data system. The simulations have showed that the algorithm in this paper is much better than the Esprit methods of auto2high2order cumulant in identification and stability of the spectral estimation, and its ability to overcome disturbance is also better. The method has lower SNR than auto2high2order cumulant methods.

Key words: cross2high2order cumulant; harmonic retrieval; state space model

1 引言

色噪声背景下谐波恢复是信号处理领域里的核心问题之一. 目前, 有互谱 Levinson、互谱 Pisarenko 和 MUSIC 等方法可从噪声中提取微弱信号. 本文所提谐波恢复的互高阶累计量 Hankel 矩阵法, 可同时抑制各信道间相关的高斯色噪声及互不相关的任意零均值色噪声的影响, 从而克服了高阶谱估计方法^[1]仅能抑制高斯色噪声和现代互谱估计方法^[2]仅能抑制相互独立的色噪声的缺点, 为色噪声背景下的谐波恢复及其他相关问题提供了一种新的处理手段, 比其他 AR、MA、ARMA 模型更能够揭露问题的实质.

2 基于互四阶累计量的状态空间模型的建立

数据模型为:
$$x(n+1) = Fx(n) \quad (1a)$$

$$z(n) = h^T x(n) + F_x(n) + G_x(n)$$

$$y(n+1) = Fy(n) \quad (1b)$$

$$z(n) = h^T y(n) + F_y(n) + G_y(n)$$

式中 $F = \text{diag}(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}, \dots, e^{j2\pi f_q})$, $h = (1, 1, \dots, 1)^T$; $x(0) = [A_1 e^{j\phi_1}, A_2 e^{j\phi_2}, \dots, A_q e^{j\phi_q}]^T$, $y(0) = [B_1 e^{j\psi_1}, B_2 e^{j\psi_2}, \dots, B_q e^{j\psi_q}]^T$ 为初始向量; $x(n)$ 、 $y(n)$ 及 $z(n)$ 、 $z(n)$ 为两个通道的状态向量和测量输出; A_i 、 B_i 及 ϕ_i 、 ψ_i 分别为谐波信号的幅值和随机相位, 其中 ϕ_i 、 ψ_i 在 $[-\pi, \pi]$ 区间独立均匀分布; f_i 为谐波信号的频率; F_x 、 F_y 为互不相关的零均值非高斯色噪声, G_x 、 G_y 分

别为相关的谱密度未知的零均值高斯色噪声 F_x 、 F_y 和 G_x 、 G_y 相互独立, 称 F_x 、 F_y 和 G_x 、 G_y 为混合色噪声. 由以上状态空间模型可见, 求解谐波信号频率的问题实际上转化为从测量输出中估计状态转移矩阵的特征值问题.

定义 1 对标量复数随机过程 $x(n)$ 、 $y(n)$ 有

$$\begin{aligned} c_{xyxx}(k, m, n, r) &= \text{cum}(x(k), y(k+m), x(k+n), x(k+r)) \\ &= E[x(k)y(k+m)x(k+n)x(k+r)] \\ &\quad - E[x(k)y(k+m)]E[x(k+n)x(k+r)] \\ &\quad - E[x(k)x(k+n)]E[y(k+m)x(k+r)] \\ &\quad - E[x(k)x(k+r)]E[y(k+m)x(k+n)] \end{aligned} \quad (2)$$

式中上标 $*$ 代表复数共轭, cum 和 E 分别代表累计量及数学期望.

定义 2 对于 q 维复数随机向量 $x(k)$ 、 $y(k)$ 、 $c_{xyxx}(k, m, n, r)$ 代表 $q^4 @ 1$ 维的向量, 其第 $(i_0 - 1)q^3 + (i_1 - 1)q^2 + (i_2 - 1)q + i_3$ 个元素为

$$\text{cum}(x_{i_0}(k), y(k+m), x_{i_2}(k+n), x_{i_3}(k+r)) \quad (3)$$

式中 $x_{i_s}(k)$ 和 $y_{i_1}(k)$ 分别为向量 $x(k)$ 和 $y(k)$ 的第 i_s 个元素和第 i_1 个元素.

定理 1^[3] 设状态空间模型如式(1a)、(1b)所描述, 则输出 $z(k)$ 、 $z(k)$ 的互四阶累计量为:

$$c_{zzz}(k, m, n, r) = h^T F^{n-1} g(k, m, r) \quad (4)$$

式中 $g(k, m, r) = (h^T a \quad h^T F^{ma} \quad h^T F^{ra} \quad h^T F^r) c_{yxx}(k, 0, 0, 0)$, K 为正数, m, r 非负.

引理 1 对于谐波恢复问题, 如式(1a)、(1b)所示的状态空间模型其状态向量 $x(n)$ 、 $y(n)$ 和输出 $z(k)$ 、 $\mathbf{z}(k)$ 是关于其互四阶累积量广义平稳的. 有 $c_{yxx}(k, m, n, r) = c_{yxx}(m, n, r)$ (5)

考虑到状态空间模型中的噪声项的互四阶累积量为零, 又有 $c_{zzz}(k, m, n, r) = c_{zzz}(m, n, r)$ (6) 证明略.

根据定理 1 和引理 1, 式(1)可用下式来描述

$$c_{zzz}(k, m, n, r) = h^T F^{n-1} g(m, r) \quad (7)$$

$$g(m, r) = (h^T a \quad h^T F^{ma} \quad h^T F^{ra} \quad h^T F^r) c_{yxx}(0, 0, 0) \quad (8)$$

即互四阶累积量 $c_{zzz}(k, m, n, r)$ 独立于始状态时间 k .

若 m, r 固定, 式(8)使 $c_{zzz}(m, n, r)$ 可以被看成用空间模型 $(F, g(m, r), h^T)$ 描述的 LTI 系统的 Markov 参数, n 为时间索引, 即: $\mathbf{x}(n+1) = F\mathbf{x}(n) + g(m, r)D(n)$ (9)

$$c_{zzz}(m, n, r) = h^T \mathbf{x}(n) \quad (10)$$

式(10)就是所求的基于互四阶累积量的状态空间模型.

3 Hankel 矩阵分解法

由于 $z(n)$ $\mathbf{z}(n)$ 的互四阶累积量可被认为是具有状态空间模型结构 $(F, g(m, r), h^T)$ 的 LTI 系统的 Markov 参数, 则由输出的互四阶累积量构成的 Hankel 矩阵必有有限阶次.

$$H = \begin{bmatrix} c(1) & c(2) & c(3) & \dots \\ c(2) & c(3) & c(4) & \dots \\ c(3) & c(4) & c(5) & \dots \\ M & M & M & \dots \end{bmatrix} \quad (11)$$

定义 3 $C(n) = C_{zzz}(m, n, r) = h^T F^{n-1} g(m, r)$, 式中 m, r 固定 Hankel 矩阵, $H = (8)$, 式中 $(, 8$ 为扩阶可观测矩

阵和可控矩阵, 式中 $(= \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \\ h^T F^2 \\ \dots \\ M \end{bmatrix}$, $8 = [g(m, r), Fg(m, r),$

$F^2 g(m, r), \dots]$ (12)

定理 2 若 $(F, g(m, r), h^T)$ 由式(1)和式(4)定义, 且满足相应的噪声及相位等假设条件, 则 $\{h^T, F\}$ 能观测, $(F, g(m, r))$ 能控制.

证明 由式(1)可知, 可观测矩阵 $($ 为 Vandermonde 矩阵

$$(= \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \\ h^T F^2 \\ \dots \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_q \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s & s & \dots & s \end{bmatrix} \quad (13)$$

如果 $X_i X_j \neq X_j X_i$ 则 $($ 是满秩矩阵. 假设 $X_i = e^{2\pi f_i}$ 且 $f_i X_j, i X_j$, 有 $\text{Rank}[(] = q$. 则

$$8 = [g(m, r) \quad Fg(m, r), \dots] = \begin{bmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & g_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \dots \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_q & X_q^2 & \dots \end{bmatrix} \quad (14)$$

若 $g_i X_0, i = 1, 2, \dots, q, 8$ 是满秩的, $g_i = -A^3 B X^{1-m-r} X_0$, 可知 8_1 为可控矩阵. 证毕.

可见有限维数的 Hankel 矩阵具有有限阶次 q . 构造一个 L 维 Hankel 矩阵.

$$Hc_1 = \begin{bmatrix} c(1) & c(2) & c(3) & \dots & c(1) \\ c(2) & c(3) & c(4) & \dots & c(1+1) \\ c(3) & c(4) & c(5) & \dots & c(1+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(1) & c(1+1) & c(1+2) & \dots & c(2l-1) \end{bmatrix} = (c_1 8c_1) \quad (15)$$

$$(c_1 = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \\ h^T F^2 \\ \dots \\ h^T F^{l-1} \end{bmatrix}, 8c_1 = [g(m, r), Fg(m, r), F^2 g(m, r), \dots, F^{l-1} g(m, r)] \quad (16)$$

上面分解中 $l \setminus q$, 且每一个矩阵的阶次都为 q . 为求解状态转移矩阵的特征值, 将其修改为:

$$H_1 = (c_1 F^{-1} 8c_1 = (1 8_1) = \begin{bmatrix} c(-1+1) & c(-1+2) & c(-1+3) & \dots & c(0) \\ c(-1+2) & c(-1+3) & c(-1+4) & \dots & c(1) \\ c(-1+3) & c(-1+4) & c(-1+5) & \dots & c(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(0) & c(1) & c(2) & \dots & c(l-1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中 $(_1 = (c_1 F^{-1}, 8_1 = 8c_1$.

定义旋转 Hankel 矩阵 H_1 为

$$H_1 = \begin{bmatrix} c(-1+2) & c(-1+3) & c(-1+4) & \dots & c(1) \\ c(-1+3) & c(-1+4) & c(-1+5) & \dots & c(2) \\ c(-1+4) & c(-1+5) & c(-1+6) & \dots & c(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(1) & c(2) & c(3) & \dots & c(l) \end{bmatrix} \quad (18)$$

与 H_1 的分解相对应, H_1 的分解可写成, $H_1 = (1 F 8_1$.

定理 3 令 $Z_1 = X Y^H, Z_2 = X S Y^H$ (19)

式中 $X I C^{p \times r}, Y I C^{q \times r}$ 为列满秩, $S I C^{r \times r}$ 为非奇异矩阵. H 代表共轭转置, Z_1 含项 SVD 分解为

$$Z_1 = U_0 \overset{2}{E} V_0^H \quad (20)$$

而 $U_0 I C^{p \times r}, V_0 I C^{q \times r}$ 以及 $\overset{2}{E} I C^{r \times r}$ 为满秩. Z_2 可以使用下面任何一种方式来表达:

$$Z_2 = U_0 \overset{2}{E} T S T^{-1} \overset{2}{E} V_0^H = U_0 \overset{2}{E} T S T^{-1} \overset{2}{E} V_0^H \quad (21)$$

式中 $T I C^{r \times r}$ 是可逆的, 且

$$K[S] = K \begin{bmatrix} -1 & & & \\ \overset{2}{E} & U_0^H Z_2 V_0 & & \\ & & & -1 \\ & & & \overset{2}{E} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \overset{-2}{E} & & & \\ \overset{2}{E} & U_0^H Z_2 V_0 & & \\ & & & -2 \\ & & & \overset{2}{E} \end{bmatrix} \quad (22)$$

表 1

SNR		自高阶累计量 Esprit 法				Hankel 矩阵分解法			
		均值 f1= 0. 1900	均值 f2= 0. 1700	均方误差 f1= 0. 1900 x10 ⁻³	均方误差 x10 ⁻³ f2= 0. 1700	均值 f1= 0. 1900	均值 f2= 0. 1700	均方误差 x10 ⁻³ f1= 0. 1900	均方误差 x10 ⁻³ f2= 0. 1700
-	10	0. 19457	0. 17231	0. 00130	0. 99235	0. 19383	0. 17159	0. 85912	0. 97323
-	6	0. 19413	0. 17196	0. 00120	0. 87004	0. 19358	0. 17151	0. 76869	0. 84213
数据	45	0. 19185	0. 17179	0. 00112	1. 18379	0. 19127	0. 17133	0. 00093	0. 00097
长度	50	0. 19151	0. 17166	0. 00102	1. 06257	0. 19119	0. 17099	0. 00092	0. 00088

证明略.

定理 4 令 U_0, V_0 和 \sum_0^2 分别代表 $L@q, L@q$ 和 $q@q$ 维矩阵, 它们由 $L@L$ 维矩阵 Hc_1 的舍项奇异值分解得到, 其中 $L \setminus q$ 那么频率 f_i 可以通过计算下式的特征值得到

$$\sum_0^{-1} U_0^H Hc_1 V_0 \sum_0^{-1} \quad (23)$$

证明略.

4 数字仿真实验

采用数学仿真模型

$$z(n) = e^{j2\pi f_1 n} + e^{j2\pi f_2 n} + F_z(n) + G_z(n) \quad (24)$$

$$x(n) = e^{j2\pi f_1(n)} + e^{j2\pi f_2(n)} + F_x(n) + G_x(n) \quad (25)$$

式中 $f_1 = 0.17\text{Hz}, f_2 = 0.19\text{Hz}$; $F_z(n)$ 和 $G_z(n)$ 分别由方差为 1 的零均值, 且相互独立的非高斯的色噪声通过一个四阶带通滤波器产生; 该滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{0.0201(1 + 2z^{-2} - 1.23z^{-4})}{1 - 2.981z^{-1} + 2.037z^{-2} - 3.192z^{-3} + 0.0145z^{-4}} \quad (26)$$

其归一化功率谱密度曲线如图(1)所示. $F_z(n)$ 与 $F_x(n)$ 为同一个方差为 1 的零均值高斯的白噪声分别通过两个四阶带通滤波器产生; 该滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{k(1 - 2z^{-1} + z^{-4})}{1 - 0.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}} \quad (27)$$

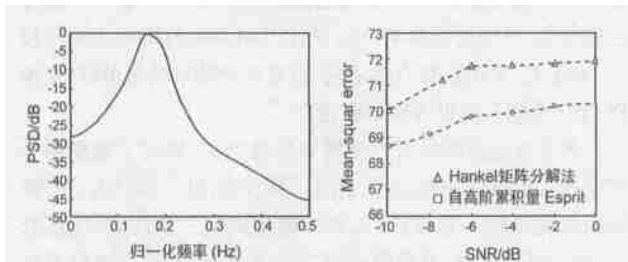


图 (1) 色噪声的功率谱

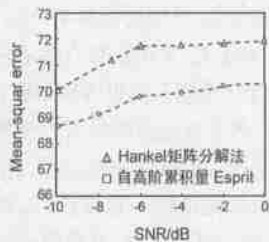


图 (2) 均方误差随信噪比变化

则 $G_x(n), G_z(n)$ 为相互独立的零均值非高斯色噪声, $F_z(n)$ 与 $F_x(n)$ 为相关的高斯色噪声. 此种信号模型常见于用两个独立电源(共地)供电的传感器对同一物理量测量进行测量, 传感器的输出信号由同一数据采集系统采集后所得到的信号, 由于传感器结构和环境的复杂性, 所以各个传感器的附加噪声往往是非高斯的, 而数据采集系统所产生的噪声一般都是高斯的. 取 $x(n), y(n)$ 的数据长度均为 25, 在 $[-10, 0]$ dB 区间以 2dB 信噪比为间隔, 分别对各信噪比位置点进行 20 次独立的谐

波恢复的仿真实验. 图(2)、图(3)展示了本文所提出方法与自高阶累计量 ESPRIT 方法数据长度为 50 的均方值误差和均值的对比仿真图. 本文方法与自高阶累计量 Esprit 方法不同信噪比下的均值和均方误差对比及不同数据长度下的均值和均方误差对比示于表 1.

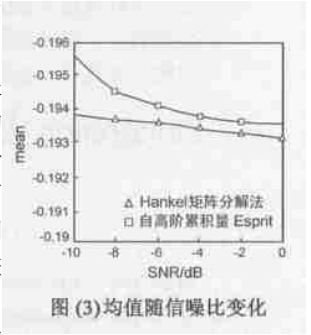


图 (3) 均值随信噪比变化

仿真结果证明, 本文提出的

方法无论在均值还是在均方误差方面都优于自高阶累计量的谐波恢复的方法. 这反映了自高阶累计量方法在存在非高斯噪声的情况下表现出了数据波动大和不精确. 本文提出的方法具有较好的估计参数稳定性和较高的测量精度. 这表明互高阶累计量具有较强的噪声抑制能力.

5 结束语

本文首次具体地根据互高阶累计量的状态空间模型建立了 Hankel 矩阵, 通过矩阵变换及特征值分解的手段获得了短数据下的高精度谐波恢复的 Hankel 矩阵分解法. 为多通道混合有色噪声及相关高斯噪声的抑制问题提供了一条全新的解决方案.

参考文献:

- [1] 梁应敞, 等. 高阶累计量在谱估计中的应用 [J]. 电子学报, 1992, 20(4): 93- 96.
- [2] 石要武, 等. 有色噪声背景下正弦信号频率估计的互谱 Pisarenko 和 MUSIC 方法 [J]. 电子学报, 1996, 24(3): 46- 51.
- [3] A Swami. Time and lag recursive computation of cumulants from a state space model [J]. IEEE Trans Automat, Contr, 1990, 79(1): 36- 47.

作者简介:



康晓涛 女, 1957 年出生于吉林省德惠县, 副教授, 研究方向为数字信号处理、弱信号检测. E-mail: Kxt511@sohu.com.

石要武 男, 1954 年出生于河北省抚宁县, 教授、博士生导师, 研究方向为数字信号处理、弱信号检测.